Asociación Española para el Progreso de las Ciencias

Congreso de Granada

Los muros de hormigón armado para sostenimiento ó embalse

por D. Juan Manuel Zafra

Imprenta de Eduardo Arias
San Lorenzo, 5, Madrid





LOS MUROS

DE

HORMIGÓN ARMADO PARA SOSTENIMIENTO Ó EMBALSE

POR

D. JUAN MANUEL ZAFRA

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

(Sesión del 22 de Junio de 1911.)

I

TIPOS DE MUROS.

La construcción de altos muros, sujetos á fuertes empujes, constituye un campo de aplicaciones del hormigón armado, en el que, más quizá que en ningún otro, se han de obtener fecundos resultados, gracias á las especialísimas cualidades de ese material.

La estabilización de un muro, construcción en la que predomina el elemento altura, cuando tras él existe un cuerpo que ejerce acciones transversales, exige contrarrestar la tendencia al vuelco y al deslizamiento por ellas originada y, para lograrlo, acumular acciones verticales en magnitud y posición tal, que la resultante de unas y otras:

1.° Tenga, respecto al extremo de la base, un momento bastante mayor, generalmente doble, que el de los empujes.

2.° Esté inclinada respecto á la vertical un ángulo menor que el de rozamiento del muro sobre el terreno, y

3.° Corte á la base del muro dentro del núcleo central.

Estas tres condiciones sólo se realizan á expensas de exagerar el elemento anchura, aparte de forzar, en lo posible, la densidad del material. El volumen del muro, cuyo peso es el único elemento de estabilización, resulta siempre considerable, á veces colosal.

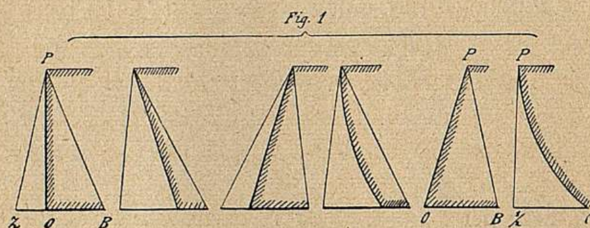
Y no es esto sólo. No se puede, prácticamente, contar con la resistencia de las fábricas al trabajo de tracción más que como un elemento



indirecto de seguridad. Las tres condiciones antedichas deben ser, con ligeras variantes, satisfechas en cualquier sección del muro.

Si en lugar de servir como peso estabilizador el siempre costoso de la misma construcción, se hace entrar en juego el del cuerpo que empuja, peso que no cuesta nada, las condiciones del problema varían radicalmente desde el punto de vista constructivo, nada en absoluto respecto al mecánico.

Las acciones transversales, empujes, ejercidas por el cuerpo, se deben á una diferencia de niveles, de perfiles ó de ambas cosas, hecha efectiva mediante *(fig. 1.ª)* una *pantalla* OP, curva ó recta, vertical, ataluzada ó desplomada. Sobre una *basa* OB y una *zarpa* OZ gra-



vitan los volúmenes del cuerpo necesarios y suficientes para cumplir las condiciones mecánicas ya fijadas. Corresponden basa y zarpa, respectivamente, á los niveles mayor y menor; este último puede ser nulo.

Pantalla, *basa* y *zarpa* forman un conjunto rígido merced á su mutua unión, de trecho en trecho, por *contrafuertes* OPB, OPZ. De ese tipo general, en el que coexisten los cuatro elementos, se derivan otros particulares, al anularse la zarpa ó la basa, con los contrafuertes respectivos *(fig. 1.ª)*.

Nos proponemos estudiar con toda generalidad la forma y proporciones de dichos elementos, hasta llegar á deducir los tipos constructivos más económicos y apropiados á las necesidades de la práctica.

II.

BASES DE CÁLCULO.

Un árido, formado por numerosos elementos sólidos, de forma y tamaño variables entre límites muy extensos, no es sino un líquido imperfecto. La cohesión, único lazo que liga las moléculas de los líqui-

dos, prácticamente nula (salvo en pequeñas masas), en los muy fluídos (éter, bencina, agua, etc.), apreciable en los viscosos (aceites, melazas, etc.) llega á ser tal en algunos cuerpos que, como ciertas breas, aparecen con todos los caracteres externos (dureza, fragilidad, etcétera) de los sólidos y, sin embargo, se comportan al cabo de largo período, como líquidos, amoldándose plásticamente bajo la acción de su peso hasta extenderse por el suelo ó tomar la forma de los depósitos que limitaban los primitivamente montones de trozos.

Esa cohesión se presenta también en diversos grados en los áridos, desde el elevado valor que en las tierras arcillosas compactas tiene, hasta el nulo en las arenas finas y secas.

En cambio, el rozamiento que, *estáticamente*, no se manifiesta en los líquidos, existe siempre en los áridos; á él deben la propiedad característica de mantenerse en equilibrio permanente con superficie terminal oblicua á la acción de la gravedad. El límite de esa inclinación respecto á la horizontal, el ángulo de talud natural, corresponde no sólo al rozamiento propio del árido, sino al de éste con el cuerpo en que se apoya y extiende.

En un líquido perfecto, la presión en un punto de su masa sigue la ley hidrostática: tiene el mismo valor en cualquier dirección que se considere. En un líquido viscoso ese valor varía desde un máximo, según la vertical, á un mínimo en la dirección horizontal, en la que la presión hidrostática está disminuída en el doble de la carga por unidad superficial que mide la cohesión.

En un árido, en masa ilimitada y con superficie terminal á nivel, la presión vertical es la hidrostática; la horizontal sufre la pérdida debida á la cohesión, si existe, más otra originada por el rozamiento.

La grandísima variabilidad de la cohesión obliga á prescindir de ella en la práctica; el rozamiento es también variable, pero no entre límites tan extensos; cabe asignarle un límite, mínimo de seguridad, con que contar.

Dejando á un lado siempre la cohesión en un árido de talud natural φ cuya tangente r mide el valor del rozamiento interno, la presión horizontal p_h es la hidrostática p_v, afectada por un reductor numérico

$$t^2 = \frac{p_h}{p_v} = [2r^2 + 1 - 2r\sqrt{r^2+1}\,] = \left(\operatorname{tang}\frac{90-\varphi}{2}\right)^2 \quad [1]$$

siempre que la superficie terminal esté á nivel. Si está inclinada al lí-



mite φ la presión horizontal en el sentido de la proyección de las líneas de máxima pendiente, es también p_v afectada por otro reductor numérico

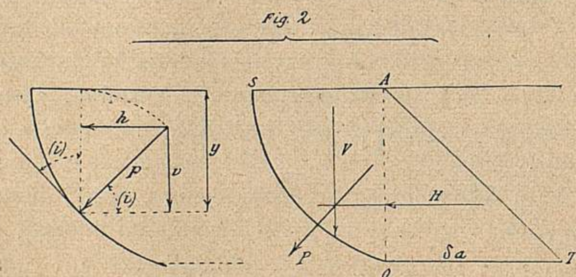
$$T^2 = \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + r^2}. \qquad [\mathbf{2}]$$

Estos valores, establecidos por la teoría de la elasticidad y experimentalmente comprobados, se refieren á las presiones que actúan sobre una sección vertical en una masa de árido sustraída á acciones exteriores. Si se considera una zona contigua á un muro, la influencia del rozamiento entre éste y el árido complica extraordinariamente el problema.

Cuando el árido termina según el talud natural, los planos verticales perpendiculares á la máxima pendiente de aquél son superficies naturales de resbalamiento, y uno cualquiera puede ser substituído por el paramento de un muro, sin que la expresión [**2**] pierda su exactitud. Fuera de este caso, la influencia del rozamiento no es susceptible de ser evaluada de un modo preciso; la presión sobre un paramento vertical no puede ser conocida exactamente ni en magnitud ni en dirección.

Lo que importa al ingeniero es, más que un valor *exacto*, un valor *seguro*, un límite superior de lo que una acción desfavorable puede valer. El procedimiento que vamos á seguir conduce á ese límite. Para nuestro trabajo de investigación, que debe tener un carácter de completa generalidad, es perfectamente racional.

Fig. 2



Consideremos primero un líquido que actúa sobre una pantalla OS (*fig. 2.ª*).

La presión en un elemento ds es normal al mismo y vale

$$\delta \times y \times ds.$$

Sus componentes son:

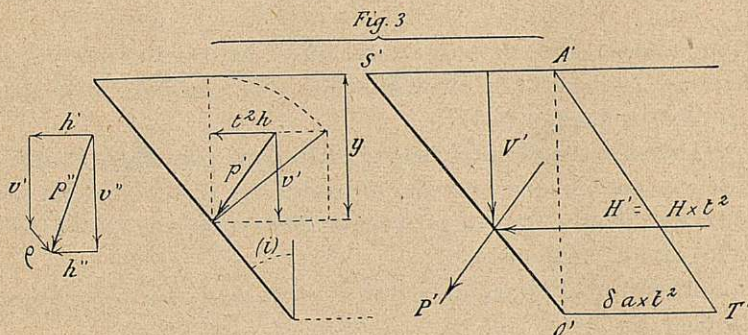
$$h = (\delta \times y \times ds) \cos i = \delta y \times dy$$
$$v = (\delta \times y \times ds) \operatorname{sen} i = \delta y \times dx.$$

Cualquiera que sea la forma de la pantalla $y = \varphi(x)$, la acción total sobre OS tiene por componentes

$$H = \int_{y=0}^{y=a} \delta y dy = \delta \frac{a^2}{2} = \delta \text{ (área de } OAT\text{)};$$

$$V = \int_{y=0}^{y=a} y dx = \delta \text{ (área de } OAS\text{)}.$$

Se puede determinar directamente P componiendo la acción horizontal H en toda la altura a con la vertical V, peso del área AOS. Si el perfil de la pantalla se substituye por otro de la misma altura, en nada cambia H; si el nuevo perfil envuelve con las rectas AS, AO la misma área, no se altera V. Si conservando la misma altura se altera



el perfil de modo que no varíen ni el área ni el momento de ésta respecto á la vertical AO, es decir, sin que cambie la abscisa del centro de gravedad, la acción total *no varía* ni en magnitud ni en posición.

En un perfil $O'S'$ (*fig. 3.ª*) imaginado dentro de la masa de un árido, desconocemos *à priori* la dirección de la presión sobre el elemento ds, pero sus componentes

$$v' = \delta \times y \times (ds \operatorname{sen} i) = \delta y dy$$
$$h' = t^2 \delta \times y \times (ds \cos i) = t^2 \delta y dx$$

la determinan y forma con la horizontal un ángulo mayor que el (i) del elemento ds con la vertical.

Si á ese perfil, imaginado dentro de la masa, substituímos el paramento de un muro, en lugar de la reacción del árido, á la izquierda de aquél, aparece la reacción del muro; el rozamiento entre uno y otro interviene y su efecto sólo es estimable en cuanto al sentido: es el de sumarse á h' y v' (*fig. 3.ª*), para dar una acción final, p'', cuya componente horizontal es menor que la primitiva, y la vertical, por lo contrario, mayor. El efecto es, en suma, disminuir las acciones *desfavorables* y aumentar las *favorables* á la estabilidad.

Si prescindimos, en todos los puntos, del efecto del rozamiento, al considerar solamente las acciones elementales

$$h' = \delta y dy; \qquad v' = t^2 \delta y dx$$

é integrar para todo el perfil, obtendremos una acción total definida por

$$H' = t^2 \delta \times (\text{área de } O'\,T'\,A')$$
$$V' = \delta \times (\text{área de } O'\,S'\,A')$$

que, indudablemente, no será la verdadera, pero sí será más desfavorable á la estabilidad. Los resultados que obtengamos se aproximarán por exceso, nunca por defecto.

Así, pues, cualquiera que sea el perfil de la pantalla y cualquiera que sea el cuerpo que empuja, obtendremos la acción total sobre aquélla, exacta si se trata de un líquido, desfavorablemente exagerada si de un árido, componiendo:

La presión total horizontal sobre el plano OA, vertical, rasante á la pantalla, y

La presión total vertical, peso del volumen limitado por dicho plano, por la superficie terminal del cuerpo empujante y por el perfil de la pantalla.

El procedimiento es absolutamente general; la diferencia entre líquidos y áridos provendrá únicamente de la densidad y del valor de los reductores, igual ó menor que la unidad.

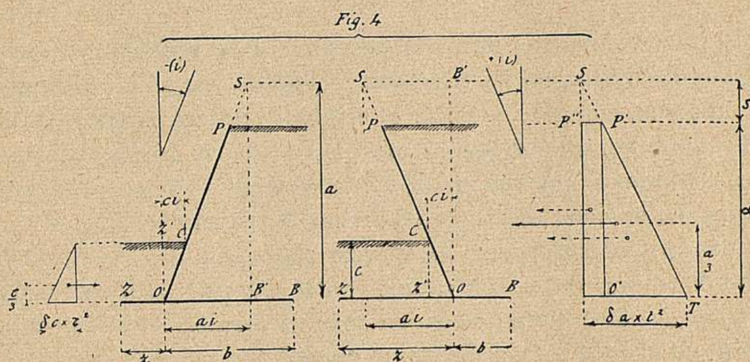
El efecto de una sobrecarga, de altura s, uniformemente extendida sobre un terraplén horizontal (ó de una presión uniforme $\pi = \delta s$), será (*fig. 4.ª*) aumentar la presión horizontal, cualquiera que sea la profundidad, en la cantidad $t^2 \delta s$. El área real de presiones se compone



del triángulo $O'T'P'$, correspondiente á la altura del muro α y del rectángulo $O'P''$, relativo á la sobrecarga s. Lo más sencillo y práctico es considerar como altura del muro la suma $a = \alpha + s$. En el valor de la presión unitaria horizontal no se comete error alguno. A la presión total verdadera

$$t^2\delta\left(\frac{\alpha^2}{2} + \alpha s\right) = \frac{t^2\delta}{2}\alpha^2 + 2\alpha s,$$

se substituye $\frac{t^2\delta}{2}(\alpha + s)^2$, con error, por exceso, $\frac{t^2\delta}{2}s^2$.



Al verdadero momento de H respecto á la horizontal de O:

$$\frac{t^2\delta}{2}\left(\frac{\alpha^3}{3} + \alpha^2 s\right)$$

se substituye

$$\frac{t^2\delta}{2} \times \frac{(\alpha + s)^3}{3},$$

con error, por exceso,

$$\frac{t^2\delta}{2}\left(\alpha s^2 + \frac{s^3}{3}\right).$$

Si el terraplén (*fig. 5.ª*) termina según el talud natural, el reductor pasa á ser T^2. En el caso de la derecha (por lo demás teórico), hay que prescindir de la zona PB', so pena de complicar extraordinaria-



mente el cálculo. La acción molecular principal correspondiente á esa rebanada es paralela al talud: se prescinde á un tiempo de su componente vertical, favorable, y de la horizontal, presión en este sentido sobre $B' B''$, desfavorable. En la práctica, de existir un perfil parecido, es con el talud según B'.

Consideran algunos dos valores de la presión horizontal en un punto de un árido, correspondientes á los dobles signos de la expresión **[1]**, tal como la teoría de la elasticidad la da:

$$t^2 = \frac{p_h}{p_v} = \left[2r^2 + 1 \mp 2r\sqrt{r^2+1}\right] = \left(\operatorname{tang}\frac{90 \mp \varphi}{2}\right)^2. \quad [\mathbf{1'}]$$

El primero (para el signo —), es el de la presión *activa*, la que el árido desarrolla, por la tendencia á resbalar de sus partículas sobre un plano, supuesto *inmoble*. El segundo (para el signo +), es el de la contrapresión ó presión *pasiva*, la resistencia que el árido opone á ser comprimido por ese plano, supuesto *móvil*. Corresponden ambos valores, en la teoría ordinaria del prisma de máximo empuje, á los dos que tienden á desprenderse del macizo: uno, que *desciende* sobre su plano de rotura, en el caso ordinario del muro de sostenimiento que es *empujado* por el terreno; otro prisma que *asciende* sobre su plano de rotura, en el caso del estribo de un puente de arco que *empuja* al terreno.

Conservaremos la expresión t para el primero y designaremos por τ el segundo de esos valores:

$$t = \operatorname{tang}\frac{90-\varphi}{2}; \quad \tau = \operatorname{tang}\frac{90+\varphi}{2} = \cot\frac{90-\varphi}{2} = \frac{1}{t}. \quad [\mathbf{3}]$$

Como $t < 1$, τ es siempre > 1. Teóricamente, la presión *pasiva*, contrapresión, acción de tope ó *topada*, de un árido es perfectamente admisible; el rozamiento interno aminora la presión activa, se opone al descenso del prisma y, en cambio, al oponerse también al ascenso del prisma, acrece el efecto resistente, aumenta la presión pasiva.

En la práctica, fuera del caso de *rellenar exactamente* con un muro una excavación practicada en el terreno, cuya masa se conserva intacta, no es prudente atribuir al contraempuje un valor superior al del empuje; las tierras en contacto con el muro, previamente removidas, se comprimen con relativa facilidad, sin desarrollar más reacción que



la activa $p^h = t^2 p^v$, nunca la considerablemente mayor, $p'_h = \tau^2 p_v = \frac{p_v}{t^2}$. Conservaremos, sin embargo, en evidencia el valor de τ, para no perder el carácter de generalidad del estudio, ó por si en algún caso las circunstancias justificaran su admisión en cuenta.

Para completar estas indicaciones, consideraremos el caso, frecuente en la práctica, de tener que evaluar la presión producida por un árido saturado de agua. La unidad de volumen de la mezcla comprende:

Un volumen absoluto, V, de materia sólida, de densidad *real* Δ y peso $V\Delta$.

Un volumen de los vacíos del árido, $v = 1 - V$, relleno de agua y que pesa v.

La densidad *aparente*, peso de la unidad de volumen del árido sólo, es $\delta = V\Delta$. La presión vertical, por unidad de profundidad, es el peso de la columna

$$\pi'_v = v \text{ (agua)} + \delta \text{ (árido)} = v + \delta,$$

y el conjunto equivale á un líquido de densidad $\delta + v$, ó de otro modo,

$$\pi'_v = (1 - V) \text{ (agua)} + V\Delta \text{ (árido)} = 1 + V(\Delta - 1),$$

es decir: la presión corresponde á la del líquido, aumentada en el peso del árido, evaluado en sumersión.

La presión horizontal producida por el líquido es $\pi_h = \pi_v$, y se transmite íntegra, por pequeños que sean los vacíos, v; la del árido es, en el aire, $t^2\delta = t^2 \times V\Delta$, por unidad de profundidad; empapado en agua, el talud natural, φ, se modifica, y el reductor numérico t^2 se hace generalmente más próximo á 1; pero sólo se puede aplicar al peso evaluado en sumersión, $V(\Delta - 1)$. La presión total es, en suma:

$$\pi'_h = 1 \text{ (agua)} + t^2 V(\Delta - 1) \text{ (árido)} = 1 + t^2 (\delta - V) = \\ = 1 + t^2 [\delta - (1 - v)],$$

es decir, la correspondiente al líquido, más la relativa á un árido cuya densidad sea la suya propia, *aparente*, δ, disminuída en el volumen *absoluto*, $1 - v$.

Si mediante una oportuna combinación de tamaños y formas de



los elementos del árido se llegaran á hacer desaparecer los vacíos, ($v = 0$), la presión sería la del líquido, que el árido recibe y transmite, más la correspondiente á su densidad en sumersión, $\Delta - 1$, que entonces sería $\delta - 1$.

Si el árido desaparece, es decir, si los vacíos llegan á valer la unidad, $\delta = V = \Delta = (1 - v)\Delta$, se anula, y la presión se reduce á la del líquido. La expresión que hemos formulado es general y exacta.

Consideran algunos la presión horizontal del árido empapado como la de un líquido de densidad δ, la aparente de aquél. La exageración es muy grande, el exceso

$$\delta - 1 - t^2(\delta - V) = V\Delta(1 - t^2) + t^2 V - 1,$$

vale para una mezcla de gravas y arenas,

$$\left(V = 0{,}70,\ \Delta = 2{,}6,\ t = \frac{1}{2}\right)$$

$$1{,}365 + 0{,}175 - 1 = 0{,}540.$$

Se substituye á la presión real

$$1 + \frac{1}{4} \times 0{,}7 \times 1{,}6 = 1{,}28,$$

la ficticia, $\delta = 1{,}82$, mucho mayor.

III.

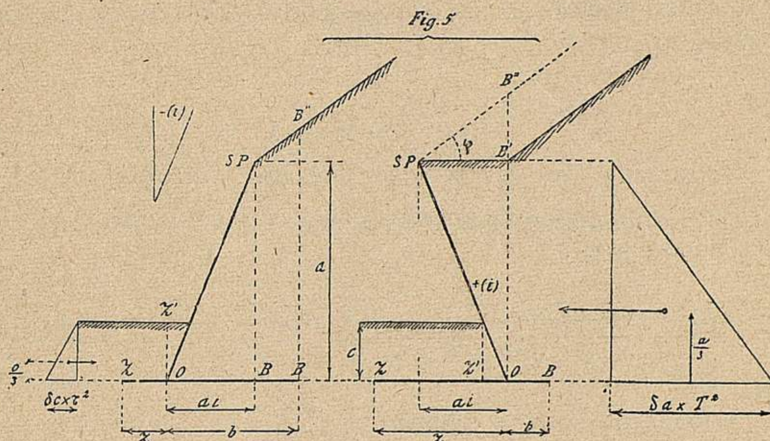
ECUACIONES GENERALES.

Las *figuras 4.ª y 5.ª* corresponden al caso más general, de muro con pantalla recta, basa y zarpa, recargada esta última con una altura c, desde la superficie á menor nivel hasta el plano de cimientos. En la *figura 4.ª* se supone el enrase horizontal, con sobrecarga uniforme. Las presiones y contrapresiones están representadas por las áreas de base $t^2\delta \times a$ y altura a (que substituye sencilla y ventajosamente á $\alpha + s$) y $\tau^2\delta \times c$ y c. respectivamente. En la práctica τ tiene el mismo valor t; se conserva, sin embargo, por lo dicho. Así, cuando



en uno ó en los dos tramos separados por la pantalla substituye al árido un líquido, basta hacer el ó los reductores correspondientes = 1.

En los casos de la *figura* 5.ª, la sobrecarga es el mismo terreno en talud perdido; las presiones de ese lado corresponden al reductor T^2.



Las notaciones son idénticas para las cuatro variantes: (i) representa, con su signo, el ángulo de la pantalla con la vertical, é i su tangente.

Salvo esos cambios de valores de t por τ y de t por T, las expresiones que siguen son absolutamente generales y se deducen, según los principios sentados, evaluando las componentes H, V, de las acciones totales

$$H = \delta \left[\frac{t^2 a^2}{2} - \frac{\tau^2 c^2}{2} \right].$$

$$V = \delta \times (\text{área sobre } SOB + \text{área sobre } COZ).$$

Así resultan, prescindiendo siempre del peso del muro y de la densidad del árido ó líquido:

Peso estabilizador:

$$V = ab + cz + i\left(\frac{a^2 - c^2}{2}\right). \quad \textbf{[4]}$$

Momento estabilizador, respecto al punto Z (ó al O cuando $z = 0$):

$$+ \left(a \frac{b^2}{2} + c \frac{z^2}{2} + abz + i \frac{a^2 - c^2}{2} z - i^2 \frac{a^3 - c^3}{6} \right). \qquad [5]$$

Momento volcador, de las acciones horizontales respecto al plano de cimiento:

$$- \left(t^2 \frac{a^3}{6} - \tau^2 \frac{c^3}{6} \right). \qquad [6]$$

Distancia del centro de presión sobre el cimiento á la arista Z (ó á O cuando $z = 0$):

$$d = \frac{3ab^2 + 3cz^2 + 6abz + 3i(a^2 - c^2)z - i^2(a^3 - c^3) - (t^2 a^3 - \tau^2 c^3)}{6ab + 6cz + 3i(a^2 - c^2)}. \qquad [7]$$

Presión media sobre el cimiento:

$$p_m = \frac{2ab + 2cz + i(a^2 - c^2)}{2b + 2z} \qquad [8]$$

á menos que $d < \frac{b + z}{3}$, y, entonces,

$$p'_m = \frac{2ab + 2cz + i(a^2 - c^2)}{3d}. \qquad [8']$$

Inclinación de la acción total respecto á la vertical:

$$\frac{H}{V} = \frac{t^2 a^2 - \tau^2 c^2}{2ab + 2cz + i(a^2 - c^2)}. \qquad [9]$$

Coeficiente de estabilidad respecto al giro alrededor de Z (ó de O):

$$\varepsilon = \frac{3ab^2 + 3cz^2 + 6abz + 3i(a^2 - c^2)z - i^2(a^3 - c^3)}{t^2 a^3 - \tau^2 c^3}. \qquad [10]$$

El cálculo deductivo de un muro ya proyectado resulta directa-



mente de esas expresiones, y se completa con la de las cargas unitarias máxima y mínima

$$p = p_m \left[1 \pm 6 \left(\frac{b+z}{2} - d \right) \times \frac{1}{b+z} \right] = p_m \left(1 \pm 3 \mp 6 \frac{d}{b+z} \right) \quad \textbf{[11]}$$

á menos que $d < \frac{b+z}{3}$, y entonces,

$$p' = p'_m (1 \pm 3 \mp 2) \mp p'_m (1 \pm 1) \quad \textbf{[11']}$$

Es fácil estudiar la influencia de los dos elementos característicos: i, que puede ser $> 0 = 0 < 0$; $\frac{b}{z}$, que puede variar desde 0 ($b = 0$) á ∞ ($Z = 0$).

IV.

MUROS SOLAMENTE CON BASA.

Supuesta nula la zarpa, impongamos la condición $\varepsilon = 2$. La expresión [**10**] da

$$2 (t^2 a^3 - \tau^2 c^3) + i^2 (a^3 - c^3) = 3 a b^2.$$

El mínimo de b corresponde á $i = 0$, y es

$$b_0 = at \sqrt{\frac{2}{3}} - c\tau \sqrt{\frac{2}{3} \frac{c}{a}} \quad \textbf{[12]}$$

ó prácticamente para $\tau = t$,

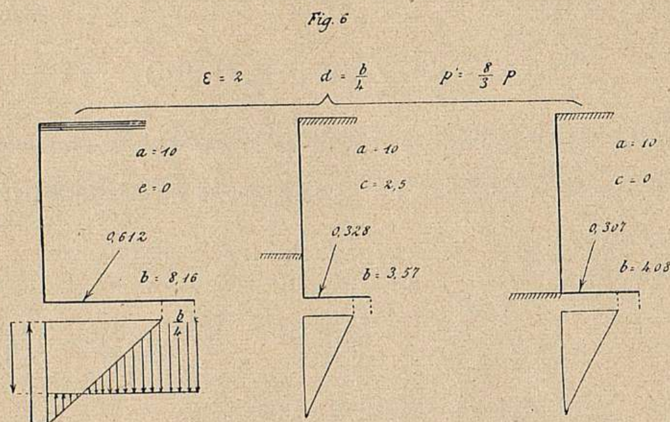
$$b' = t \sqrt{\frac{2}{3}} \left(a - c \sqrt{\frac{c}{a}} \right); \; b''_{(c=0)} = at \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \textbf{[12']}$$

y el valor de d resulta

$$\frac{3ab^2}{12ab} = \frac{b}{4}.$$

Queda, por tanto, un trozo $\frac{b}{4}$ en el extremo de la basa sin utilizar para repartir las presiones que oscilan entre o y $\frac{8}{3} p_m$.

En la *figura 6.ª* se representan tres tipos relativos á una misma altura, 10, en el caso de embalse ($t = 1 = \tau$), y en el de sostenimiento



de terraplén, con el valor muy corriente $t = \frac{1}{2}$, que corresponde á $\varphi = 36^\circ\, 52'$ y $r = \operatorname{tang} \varphi = 0{,}750$. Las dos hipótesis $c = \frac{a}{4}$ y $c = 0$, permiten apreciar concretamente la influencia del contra-empuje, aun reducido á su valor práctico $t = \tau$. De admitir el valor teórico $\tau = \frac{1}{t}$, la basa se reduciría considerablemente.

Más racional es imponer la condición $d = \frac{b}{3}$, para que toda la basa esté comprimida. Entonces se transforma [**7**] en

$$ab^2 - i\,(a^2 - c^2)\, b - i^2\,(a^3 - c^3) - (t^2\, a^3 - \tau^2\, c^3) = 0 = \varphi(i, b).$$

El mínimo de b corresponde á

$$\frac{db}{di} = -\frac{\dfrac{d\varphi}{di}}{\dfrac{d\varphi}{db}} = 0$$

ó bien, mientras $2\,ab - i\,(a^2 - c^2) \gtrless 0$,

$$b\,(a^2 - c^2) + 2i\,(a^3 - c^3) = 0;\; i = -\frac{b}{2}\,\frac{a^2 - c^2}{a^3 - c^3}$$

que, substituído en $\varphi\,(ib)$, da

$$b = \sqrt{\frac{(t^2\,a^3 - \tau^2\,c^3) \times 4\,(a^3 - c^3)}{4a\,(a^3 - c^3) + (a^2 - c^2)^2}}. \qquad [\mathbf{13}]$$

Para $c = 0$

$$b_0 = at\sqrt{\frac{4}{5}}; \qquad i_0 = -t\sqrt{\frac{1}{5}}, \qquad [\mathbf{13'}]$$

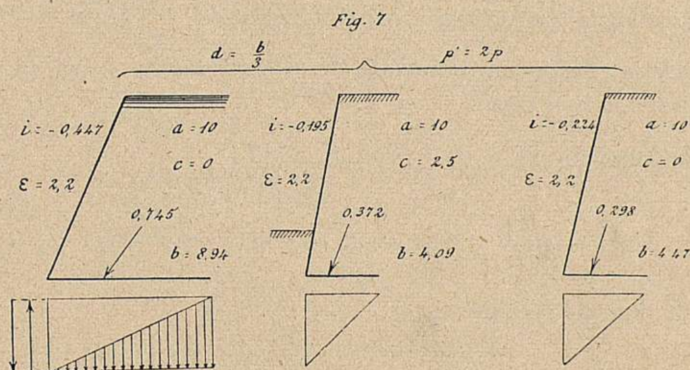
y resulta $b = -2\,ai$, es decir, el contrafuerte triangular isósceles.

El coeficiente de seguridad ($t = \tau$), es

$$\varepsilon = \frac{12\,(a^3 - c^3)^2 - a^2\,(a^2 - c^2)^2}{4a^3\,(a^3 - c^3) + a^2\,(a^2 - c^2)^2}$$

y vale, como mínimo, ($c = 0$), $\varepsilon = 2{,}2$.

Fig. 7



En la *figura* 7.ª se representan los tres perfiles típicos ya definidos: los valores de b son ligeramente superiores á los que implica la condición $\varepsilon = 2$.

V.

MUROS SOLAMENTE CON ZARPA.

Resulta de la expresión [**10**] para la condición $\varepsilon = 2$, y con $b = 0$,

$$3cz^2 + 3i(a^2 - c^2)z - i^2(a^3 - c^3) - 2(t^2a^3 - \tau^2c^3) = 0 = \varphi(i, z).$$

El mínimo de z exige, si

$$2cz + 3i(a^2 - c^2) \lesseqgtr 0, \quad i = \frac{3(a^2 - c^2)z}{2(a^3 - c^3)},$$

que conduce á

$$z = \sqrt{\frac{4(a^3 - c^3) \times 2(t^2a^3 - \tau^2c^3)}{12c(a^3 - c^3) + 9(a^2 - c^2)^2}}. \qquad [\mathbf{14}]$$

Para

$$c = 0, \quad z_0 = at\sqrt{\frac{8}{9}}, \quad i_0 = t\sqrt{2}, \quad d_0 = \frac{z_0}{4}. \qquad [\mathbf{14'}]$$

La distancia d es siempre, con esa condición, $\frac{z}{4}$. En la *figura 8.ª* se aprecia la grandísima influencia de la contracarga c, que casi por sí sola estabiliza el perfil.

Si la condición es $d = \frac{z}{3}$, resulta de [**7**]

$$cz^2 + 2i(a^2 - c^2)z - i^2(a^3 - c^3) - (t^2a^3 - \tau^2c^3) = 0 = \varphi(i, z).$$

El mínimo de z exige, si

$$cz + i(a^2 - c^2) \gtreqless 0, \quad i = \frac{(a^2 - c^2)z}{(a^3 - c^3)},$$

que conduce á

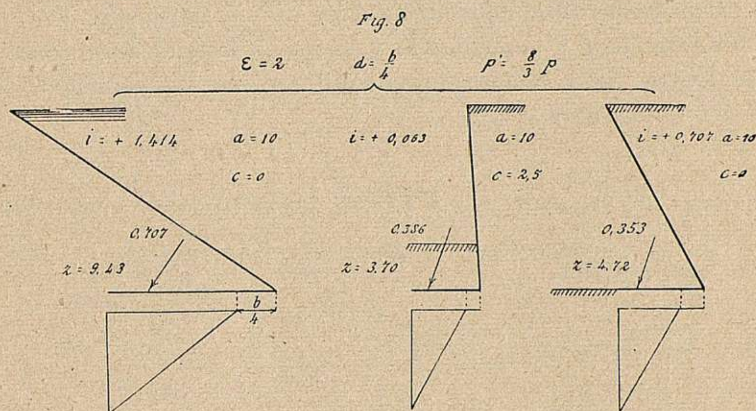
$$z = \sqrt{\frac{(t^2a^3 - \tau^2c^3)(a^3 - c^3)}{c(a^3 - c^3) + (a^2 - c^2)^2}}. \qquad [\mathbf{15}]$$



Para

$$c = 0, \quad z_0 = at, \quad i_0 = t, \quad \varepsilon_0 = 2. \qquad [\mathbf{15'}]$$

La *figura 9.ª* representa los tres tipos, en los que resulta $\varepsilon = 2$. Para $c = 0$, el contrafuerte es un triángulo rectángulo; isósceles, si $t = 1$ (embalse), y semi-isósceles, $\left(z = \frac{a}{2}\right)$ para $t = \frac{1}{2}$.



Si dentro del tipo de zarpa sola ($b = 0$) se quiere hacer vertical, la pantalla resulta

$$z = at\sqrt{\frac{a}{c}} - c\tau,$$

infinita, como es lógico, cuando $c = 0$, pues no existe entonces peso estabilizador ninguno.

VI.

MUROS CON BASA Y ZARPA.

Sea k la relación $\frac{b}{z}$ de los dos elementos que ahora coexisten.

Para la condición $\varepsilon = 2$, la expresión [**10**] se convierte en

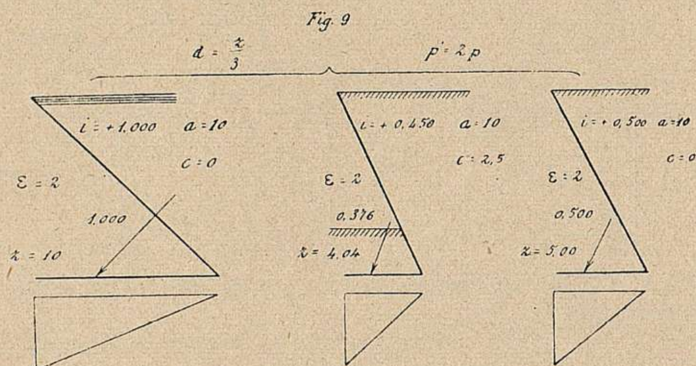
$$z^2[3c + 6ak + 3ak^2] + 3i(a^2 - c^2)z - i^2(a^3 - c^3) - 2(t^2a^3 - \tau^2c^3) = 0.$$

El mínimo de la longitud total $(k + 1) z$, ó de z, corresponde, respecto á las variaciones de la inclinación, á

$$i = \frac{3}{2} \frac{(a^2 - c^2) z}{a^3 - c^3};$$

$$z = \sqrt{\frac{2 (t^2 a^3 - \tau^2 c^3)}{3c + \frac{9}{4} \frac{(a^2 - c^2)^2}{a^3 - c^3} + ak (6 + 3k)}} \qquad \textbf{[16]}$$

y, á partir de un valor máximo ($k = 0$, $b = 0$, zarpa sola), decrece indefinidamente al ir aumentando k, es decir, al tener basa relativamente mayor, hasta alcanzar un mínimo respecto á la variación de k, para $k = \infty$ (basa sola).



Si $c = 0$, el máximo de $z = at \sqrt{\frac{8a^4}{9a^4 + a^4 k (6 + 3k)}}$ es el ya conocido, $at \sqrt{\frac{8}{9}}$ para $k = 0$; y, análogamente, la inclinación i vale entonces $t \sqrt{2}$.

La distancia d pasa gradualmente del mínimo $\frac{k + 1}{4} z$, ó $\frac{b + z}{4}$ al valor $\frac{b + z}{3}$.

Si imponemos este último valor como condición, resulta de **[7]**

$$z^2 [c + ak^2 + (4a - 2c) k] + i (2 - k) (a^2 - c^2) z - i^2 (a^3 - c^3) -$$
$$- (t^2 a^3 - \tau^2 c^3) = 0 = \varphi (ikz).$$

La condición de mínimo respecto á la variación de i, da

$$(2 - k)(a^2 - c^2) z - 2 (a^3 - c^3) = 0;$$

$$k = 2 - \frac{2i (a^3 - c^3)}{z (a^2 - c^2)}; \left\{ \begin{matrix} > 0 & < 2 \\ i = 0, & k = 2 \\ < 0 & > 2 \end{matrix} \right\} \qquad [\mathbf{17}$$

Respecto á las variaciones de k, $z = \dfrac{(a^3 - c^3) \times 2i}{(a^2 - c^2)(2 - k)}$, es mínimo para

$$\frac{2i (a^3 - c^3)(a^2 - c^2)}{(2 - k)^2 \times (a^2 - c^2)^2} = 0,$$

lo que exige $i = 0$ y, en virtud de [**17**], $k = 2$. Aparece z en la forma $\dfrac{0}{0}$; pero la expresión general $\varphi\ (ikz)$ da directamente

$$z = at \sqrt{\frac{a}{3(4a - c)}} - c\tau \sqrt{\frac{c}{3(4a - c)}}, \quad b = 2z \qquad [\mathbf{18}]$$

y el coeficiente de estabilidad es entonces

$$\varepsilon = \frac{z^2 (24a + 3c)}{t^2 a^3 - \tau^2 c^3} = \frac{24a + 3c}{12a - 3c}$$

cuyo mínimo, para $c = 0$, es 2. Para ese mismo caso ($i = 0$, $k = 2$, $c = 0$)

$$z = at \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad b = at \sqrt{\frac{1}{3}}. \qquad [\mathbf{19}]$$

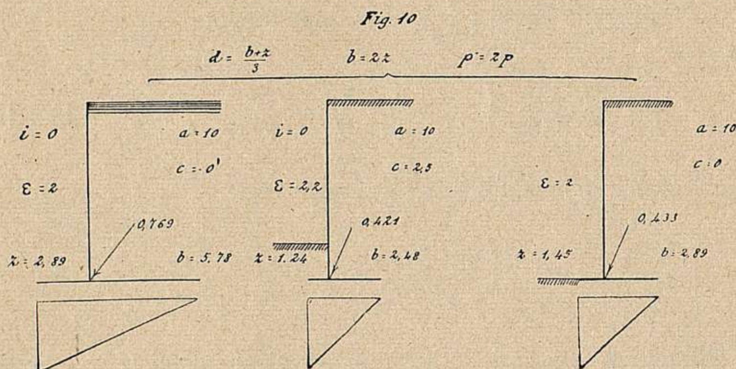
En la *figura 10* aparecen los tres perfiles de siempre. La suma $b + z$ es cuando $c = 0$, $at \sqrt{\dfrac{3}{4}}$, comprendida entre los valores $at \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ y $at \sqrt{\dfrac{4}{5}}$ de la basa sola (*figuras 6.ª y 7.ª*). No se obtiene, por tanto, ventaja alguna con la coexistencia de basa y zarpa, antes al contrario, la necesidad de doble sistema de contrafuertes complica y encarece mucho el muro.



VII.

COMPARACIONES.

Las dos condiciones mecánicas ($\varepsilon = 2$), ó $\left(d = \frac{b}{3}\right.$, ó $\frac{z}{3}$, ó $\left.\frac{b+z}{3}\right)$, son las que conducen á perfiles más económicos. En todos los casos, salvo el de zarpa nula, se puede llevar la resultante al centro ó los dos tercios de la arista y realizar así la distribución de presiones, uniforme, ó la triangular, con la máxima bajo el tramo de mayor nivel. Claro es que los valores de b, z, ó $b + z$, son, respectivamente, bastante, ó mucho mayores que en los casos estudiados.



No hay, por otra parte, interés en llevar la máxima carga unitaria bajo el tramo más cargado, porque dicha carga nunca puede llegar á valer lo que la presión debida á la altura del tramo. En los embalses con basa la subpresión, diferencia entre esos dos valores, puede ser muy peligrosa si se llega á ejercer bajo la basa, por infiltración del agua; el tipo de basa sola es en absoluto inaceptable para ese objeto.

En el de zarpa, si por insuficiencia de continuidad del rastrillo, ó de impermeabilidad del terreno subyacente llega el agua á filtrar, se pone inmediatamente á la presión del tramo inferior; saneando el terreno en las inmediaciones del pie de la pantalla se evita en absoluto el peligro.

Para el sostenimiento de tierras parece, en general, el más apro-

piado el tipo de basa sola (*figuras 6.ª y 7.ª*) Los contrafuertes trabajan por flexión compuesta, en la que predominan las tensiones. A una profundidad y se conoce el esfuerzo cortante horizontal $\Sigma_0^y h$; la compresión total vertical $\Sigma_0^y v$ y el momento flector $\Sigma_0^y (v \times \delta) - \frac{y}{3} \Sigma_0^y h$; ($\delta$ es la distancia entre la acción vertical v y el centro de la sección del contrafuerte). El cálculo inductivo para la determinación de las armaduras necesarias es muy sencillo en este caso, en que la dimensión principal de la sección viene ya impuesta y se hace rápidamente, como en nuestra obra *Construcciones de hormigón armado*, capítulo V, párrafo 3.º, demostramos.

Tambien puede ser considerado, aproximadamente, cada contrafuerte como una pieza en T de sección variable, empotrada en la basa, formando la cabeza los dos semitramos de pantalla.

La pantalla trabaja por compresión en sentido longitudinal descendente y por flexión en el transversal, normal á los contrafuertes, mucho más importante el último. Constituye un suelo plano continuo (ó cortado sobre los apoyos, como veremos en un ejemplo) que salva los vanos entre contrafuertes, con la particularidad de que á la inversa de los suelos ordinarios, en los que los nervios *sustentan* al forjado, aquí está éste *colgado* de ellos. En razón de esto las armaduras de los contrafuertes deben penetrar dentro de la pantalla y estar relacionadas con las propias de ésta, de modo que la acción de *suspensión* se efectúe y distribuya de un modo aceptable. La carga unitaria, función de la profundidad, puede ser, para mayor sencillez, tomada como la misma presión horizontal correspondiente, prescindiendo del valor de i.

La distribución de armaduras claro es que resulta á la inversa de lo usual.

La basa recibe por su cara superior la carga del terreno, uniforme cuando $i = 0$, y que por comodidad puede ser considerada tal, aunque $i \gtrless 0$; por la cara inferior actúa en sentido ascendente la reacción del suelo, distribuída triangularmente. La acción total resultante, suma algebráica de las anteriores, está representada en las *figuras 6.ª y 7.ª*, caso del embalse.

Como se ve, predominan las acciones descendentes á medida que la distancia al pie de la pantalla va siendo mayor. La distribución es bastante desfavorable, y con arreglo á ella hay que calcular la basa como suelo continuo, en general *colgado* (en alguna zona (*fig. 6.ª*) *sustentado*) de los contrafuertes.



Al pasar á los tipos de zarpa sola (*figuras 8.ª y 9.ª*), aparecen diferencias radicales. En primer lugar, la zarpa no necesita existir de un modo real como superficie continua, ininterrumpida, cual la basa. Fuera de los casos en que se quiera apurar las dimensiones contando con el efecto de la carga *c*, sobre el cimiento, el peso estabilizador es únicamente el que actúa sobre la pantalla; la zarpa puede y debe quedar limitada á la sección horizontal de cada contrafuerte, con la longitud *z* y con el espesor estricto para que la máxima presión unitaria sobre el suelo sea prácticamente admisible. Y como la presión por unidad de longitud crece entre los puntos *O* y *Z*, se puede y se debe hacer aquel espesor variable á compás de esta presión y reducir así á un mínimo el volumen del cimiento.

El trabajo del contrafuerte es, como antes, de flexión compuesta, salvo que ahora predominan los motivos positivos y, por tanto, las compresiones; el cálculo, por lo demás, es idéntico. Las máximas cargas de compresión corresponden á la arista exterior *P Z*; las mínimas (que en las zonas altas pueden ser negativas), junto á la pantalla. La influencia del pandeo no debe dejarse de estudiar, porque corresponden precisamente las mayores cargas con las mayores alturas, y si la total es de alguna entidad, precisará, para no tener que esforzar los espesores, arriostrar horizontalmente todos los contrafuertes con diversos órdenes de riostras, cuya separación, dentro de cada orden, será máxima cerca de la pantalla é irá acortándose progresivamente.

Cabe, en general, reducir los contrafuertes á entramados, con notable reducción del volumen y á expensas de mayor y más costosa mano de obra. Cabe también, cuando las alturas son moderadas, *suprimir* los contrafuertes, á expensas de regruesar los otros elementos y sus armaduras lo necesario para que cada uno trabaje y resista como empotrado por su base en el otro.

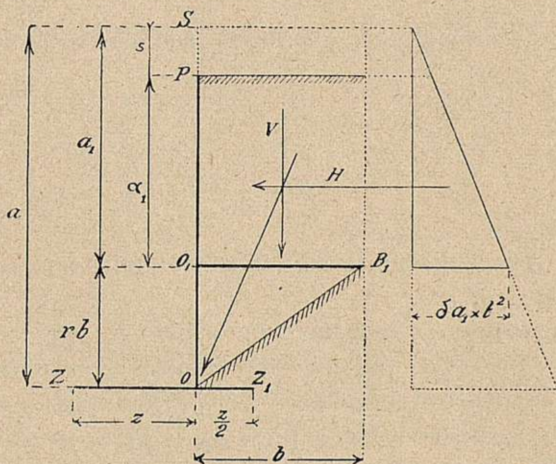
A pesar de la sujeción que la posibilidad de pandear y la necesidad de arriostrar implican, se comprende que los tipos de zarpa sola, *figuras 8.ª y 9.ª*, sean más ventajosos que los de la basa sola *figuras 7.ª y 6.ª*, y mucho más que los de basa y zarpa (*fig. 10*). Las circunstancias especiales del problema, espacio disponible, necesidad de restringir la excavación para no perturbar mucho el primitivo equilibrio del terreno, aspecto de la obra, etc., decidirán, en suma, la elección de tipo. Subsistirá siempre, como en todo problema ingenieril, la indeterminación respecto á separación de contrafuertes, sólo resoluble mediante tanteos, así como respecto á distribución de espesores y cuantía de armaduras, que se puede hacer como en nuestra obra indicamos.



La inclinación de la acción total, admisible en casi todos los perfiles de sostenimiento, es excesiva en algunos de éstos y muy grande en todos los de embalse. Precisa contrarrestar directamente la acción horizontal, recuadrando los extremos de la basa ó zarpa en forma de rastrillo. No solamente se aprovecha así la contrapresión del terreno (que en tal forma, cuidando de rellenar exactamente las zanjas especiales de los rastrillos, puede ser racionalmente evaluada como *presión pasiva*, con $\tau = \frac{l}{t}$ ó con un valor intermedio entre t y $\frac{l}{t}$) sino que se interesa en el equilibrio horizontal toda la masa de terreno encajonada entre rastrillos y no removida por excavaciones. El peso muerto de la construcción contribuye también á aminorar el ángulo $\frac{H}{V}$, pero en poca escala dada su ligereza.

Terminaremos esta parte estudiando un tipo especial, más curioso que recomendable, pero que en ocasiones pudiera encontrar aplicación y que pone en evidencia los recursos á que permite acudir el hormigón armado.

Fig. 10 bis



En un perfil completo (*fig. 10 bis*), se establece la basa b, á una altura rb ($r = \tang \varphi$), sobre O: queda el terreno desde B_1 á O con su talud natural y la componente H corresponde solamente á una altura $a_1 = a - rb$.

Impongamos la condición de paso de la resultante por O:

$$a_1 \frac{b^2}{2} - \frac{t^2 a_1^2}{2} \left(\frac{a_1}{3} + rb \right) = 0; \quad 3\,b^2 - 3\,t^2 r a_1 \times b - t^2 a_1^2 = 0;$$

que determina la basa en función de a_1 substituyendo $a_1 = a - r\,b$,

$$b = \frac{tr \pm \sqrt{9\,t^2 r^2 + 12}}{6 + 4\,t^2 r^2} \times at. \qquad \textbf{[20]}$$

Para que el coeficiente de estabilidad valga 2, determinaremos z,

$$t^2 a_1^2 \left(\frac{a_1}{3} + rb \right) = a_1 b z;$$

$$z = a_1 t \left[rt + \frac{1}{3\left[\frac{rt}{2} + \sqrt{\frac{r^2 t^2}{4} + \frac{1}{3}} \right]} \right] \qquad \textbf{[21]}$$

que, para no complicar la expresión, queda en función de a_1 ya conocida. Basta agregar á la derecha de O un suplemento, $\frac{z}{2}$, para que la acción total se distribuya triangularmente, con el máximo $a_1\, b \times \frac{4}{3\,z}$ bajo el punto Z''.

VIII.

PERFIL RACIONAL DE MÁXIMA ESTABILIDAD.

Alguno de los tipos estudiados han recibido ya aplicación. Aparte de numerosas presas de mediana importancia, construídas por los americanos, algunas con forma poco racional (sin duda establecida á ojo), existe un ejemplo notable: la presa de *La Prele* (Estados Unidos), descrita en *The Engineering Record* (1909) y *Le Genie Civil* (1911). Alcanza 42 m. de altura y se ajusta, casi exactamente, en proporciones al tipo de la *figura 9.ª*

Precisamente esta hermosa obra nos sugirió la idea de estudiar el problema como queda hecho, en general, y, en particular, si habría posibilidad de mejorar sus ya notables condiciones.



Nadie, que sepamos, ha empleado, hasta ahora, pantallas curvas, admitiéndose sin discutirlo, la conveniencia de las rectas.

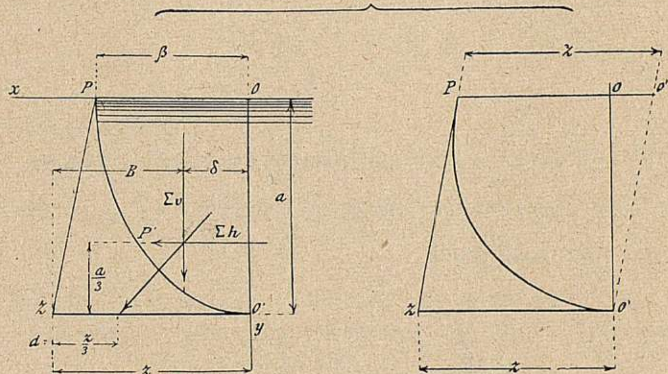
Desde el momento en que el problema se plantea como el ingeniero debe hacerlo, huyendo en cuanto posible es de postulados, la solución aparece clara y terminante.

El problema ingenieril es: investigar la forma y proporciones de un muro de embalse de condiciones mecánicas (coeficiente de estabilidad, distribución de cargas), necesarias y suficientes y de mínimo coste.

Por lo ya visto quedan desde luego descartados todos los tipos que no sean el de *zarpa*. Si la pantalla es recta, la inclinación 1.000 y la zarpa $z = a$ dan la solución, tipo al que se aproxima mucho la presa citada.

Sea, en general, $y = \varphi(x, \beta)$ (*fig. 11*), la ecuación de una familia de curvas, que pasan todas por un punto o' á la profundidad a, bajo el origen de coordenadas o. El parámetro variable, β, que individualiza cada curva, será la *boca* del perfil, OP, valor de x para $y = 0$; así como la altura del embalse a, es el de y para $x = 0$.

Fig. 11



Sea $O'Z = z$ la zarpa que necesitan los contrafuertes para que se realicen las condiciones mecánicas, que la resultante pase por el extremo del núcleo central $\left(d = \frac{z}{3}\right)$.

Necesitamos conocer: primero, la familia de curvas $\varphi(x, \beta)$; segundo, el valor del parámetro β, y tercero, el de la zarpa z.

Deben ser mínimos: primero, el coste de la pantalla, y, por tanto, el desarroyo de la curva en el cuadrante $O'P'P$, y segundo, el coste de los contrafuertes, y para ello, el área $O'P'PZ$.



Sea δ la abscisa del centro de gravedad del cuadrante $OPP'O$:

$$\frac{\int_0^\beta yxdx}{\int_0^\beta ydx}.$$

La condición de estabilidad es

$$\frac{z}{3} \times \int_0^\beta ydx = (z - \delta) \int_0^\beta ydx - \frac{a^3}{6},$$

ó bien

$$z = \frac{6 \int_0^\beta yxdx + a^3}{4 \int_0^\beta ydx}. \qquad [22]$$

El área del contrafuerte vale

$$\frac{z + \beta}{2} a - \int_0^\beta ydx,$$

y ha de ser mínima; así, pues, cualquiera que sea β deben ser, *dentro de las condiciones del problema*, mínimo z y máximo $\int_0^\beta ydx$. Ha de ser también mínimo el desarrollo

$$\int_0^\beta \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Las curvas que con dos rectas OP, OO', ó bien con la cuerda $O'P$ entre dos de sus puntos, abarcan un área máxima con un perímetro mínimo son, genéricamente, *elipses*.

El máximo del área $\int_0^\beta ydx$, compatible, cualquiera que sea β, con las condiciones del problema, corresponde á la tangencia de la curva en O' á $O'Z$ y en P á PZ; el perfil buscado es la elipse de semidiámetros conjugados $O'O'' = PZ$; $O''P = z$.

Pero dentro de las condiciones, no ya geométricas, sino construc-



tivas, del problema, no es dable apurar hasta el verdadero mínimo el área del contrafuerte, por la sencilla razón de que en la zona próxima á P queda tan reducida su anchura, que para que resista el trabajo de flexión habrá forzosamente que aumentarla.

Substituída la tangencia á PZ por la tangencia á la vertical de P, la curva buscada es la elipse de semiejes $O'O = a$; altura, dato del problema y $OP = \beta$, boca del perfil, todavía incógnita.

Conocida ya la familia $\varphi(x, \beta)$, lo son, en función de β:

$$\int_0^\beta y\,dx = \frac{\pi}{4} a\beta; \qquad \int_0^\beta yx\,dx = \frac{1}{3} a\beta^2,$$

la expresión [**22**] se transforma en

$$z = \frac{2a\beta^2 + a^3}{\pi a \beta},$$

cuyo mínimo corresponde á

$$\beta = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,a \qquad [\mathbf{23}]$$

y es, finalmente,

$$z_m = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a = 0{,}900\,288\,a = 0{,}900\,a. \qquad [\mathbf{24}]$$

El problema está resuelto racional y prácticamente.

El desarrollo de la pantalla, cuadrante de elipse de semiejes a y

$\frac{a}{\sqrt{2}}$ es.......................... $1{,}351\,a = \Delta$ } [**25**]
y la superficie del contrafuerte mide $0{,}248\,a^2 = \Sigma$ }

Comparados estos valores con los del tipo de la *figura 9.ª* (los de la presa de La Prele, en que i y z son algo mayores, resultan lógicamente más desfavorecidos todavía) se llega á

Desarrollo de pantalla: $\Delta = 0{,}955\,\Delta_1$
Superficie de contrafuerte: $\Sigma = 0{,}498\,\Sigma_1$

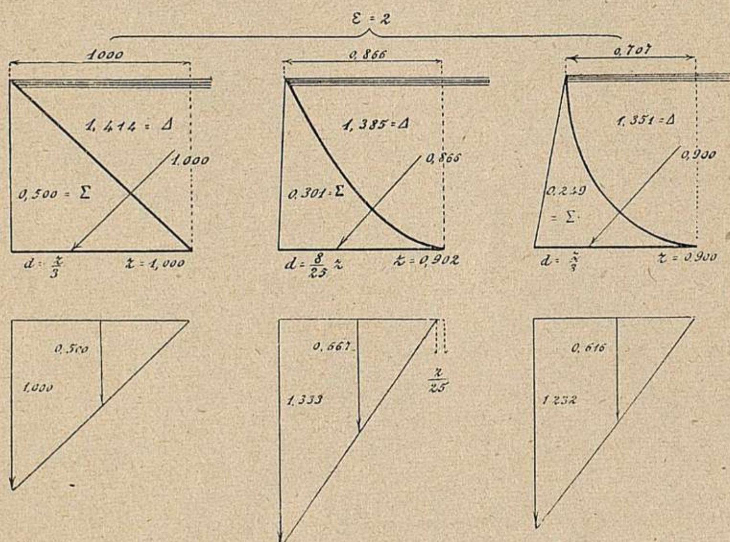
Justo es reconocer que el ahorro de longitud de pantalla, no gran cosa, queda aminorado por predominar en el perfil elíptico los elementos sujetos á mayores presiones y de mayor espesor. Pero en cuanto á la superficie de contrafuertes la ventaja es enorme.

Veamos ahora las demás condiciones que nuestro perfil ofrece.

Coeficiente de estabilidad

$$\frac{(z-\delta)\int_0^\beta y\,dx}{\frac{a^3}{6}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\times\frac{\pi a}{4}\times\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{3}\times\frac{a^2}{2}}{\frac{a^3}{6}} = 2. \quad [27]$$

Fig. 12



Presiones media, máxima y mínima:

$$p_m = \frac{\frac{\pi a}{4}\times\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{2\sqrt{2}a}{\pi}} = \frac{\pi^2}{16}a = 0{,}616a;\ p' = 0;\ p'' = 1{,}232a. \quad [28]$$

Inclinación de la resultante:

$$\frac{H}{V} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{\pi a^2}{4\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}900. \quad [29]$$

El coeficiente es el mismo del tipo recto; la presión máxima algo mayor, lo que nada importa, y la inclinación algo menor.

El peso del cimiento, aparte del de la misma obra, rebajan parcialmente esa inclinación; el rastrillo necesario para mantener la impermeabilidad basta, aunque siempre deberá ser comprobado, para equilibrar la acción horizontal.

En la *figura 13* se representan los dos tipos, con sus características para $a = 1$, y se agrega, por curiosidad, el perfil parabólico de mínima zarpa é igual estabilidad, ventajoso también, aunque no tanto como el elíptico.

IX.

PANTALLA DE MÍNIMO COSTO.

Pero todavía cabe mejorar el tipo de presa á que casi se ajusta la de La Prele. Tiene ésta su pantalla formada por losas planas, construídas aparte y sentadas sobre los contrafuertes, salvando un vano, entre ejes de éstos, de 5,40 m. y una luz real variable, por ir los mismos aumentando de espesor y ensanchando su cabeza en forma de ménsula, á medida que alcanzan mayores profundidades. Aun así, el espesor de las losas, de 30 cm. en la coronación, llega á 135 en el fondo.

Nada tiene de exagerado; á la profundidad y metros, bajo la presión 1.000 y kilos por metro cuadrado, el momento flector en el vano L, con simple apoyo, es $125\, y L^2$, ó para $L = 5$, $3125\, y$ metros-kilogramos.

Adoptando una cuantía de armadura de 0,008, el canto útil necesario es:

$$0{,}003\,54 \sqrt{M} = 0{,}198 \sqrt{y} \text{ metros.} \qquad [30]$$

Y agregando 0,04, necesarios para recubrir las barras, el espesor para 25, 49, 100 m., debe ser respectivamente, 1,03, 1,42, 2,02 m.

Puede ser reducido á los dos tercios forzando mucho las armaduras, entonces simétricas; pero lejos de bajar, sube considerablemente su costo. La reducción de vano, como en La Prele, ayuda bastante, á expensas de encarecer los contrafuertes.

Hay una solución radical: substituir en la sección transversal, como en el perfil, la recta por la curva.



Si los vanos entre contrafuertes se cierran con bóvedas parabólicas de generatrices curvas, homólogas á la elipse del perfil, se obtiene una importantísima reducción de espesor. Pero aparecen una serie de empujes normales al plano de los contrafuertes. Racionalmente se puede contar con su exacto equilibrio por parejas y el de los empujes extremos con las reacciones de los costados de la cerrada; prácticamente sería una locura fiarse de tal equilibrio, que numerosas causas accidentales pueden alterar, produciéndose entonces el desquiciamiento y ruina del sistema entero.

Precisa equilibrar directa é individualmente esos empujes, de tal modo que el conjunto sea estable *per se* y no *per accidens*, para lo cual cada elemento debe ser estable, independientemente de los demás.

A poco que alcance la profundidad, el valor del empuje llega á ser enorme; el contrarresto directo, por atirantado, es económicamente inadmisible. Pero queda un recurso: en lugar de atirantar, *contraempujar*, merced á la misma presión del agua.

Un arco parabólico, de luz L y flecha f, desarrolla bajo la acción de una carga π, uniformemente ejercida en sentido normal á L, un empuje $\frac{\pi L^2}{8f}$ por unidad de longitud. Cuando la carga proviene de la presión de un líquido, la presión total, πL, no está uniformemente repartida según la cuerda, pero la diferencia es insignificante. Paralelamente á la cuerda se producen, en cada mitad del arco, dos presiones totales, πf, por unidad de longitud. La condición

$$\pi f = \frac{\pi L^2}{8f}; \qquad f^2 = \frac{L^2}{8}; \qquad \frac{f}{L} = r = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

determina un rebajamiento, $r = 0{,}353\,5$, tal que el empuje queda prácticamente equilibrado de un modo exacto por aquella presión total.

El arco se convierte en un *bow-string* y sólo ejerce acciones normales á su cuerda, y, por tanto, en el plano de los contrafuertes. El equilibrio es independiente del valor de la presión π.

El espesor necesario para que la carga aparente del hormigón valga H kilos por centímetro cuadrado, es, á la profundidad y:

$$e = \frac{1000\,y \times L^2}{8\,\frac{L}{\sqrt{8}} \times (H \times 100^2)} = \frac{0{,}035\,35}{H}\,yL \qquad \textbf{[30']}$$

Para el límite práctico $H = 45$ kilogramos por centímetro cuadra-



do, si $L = 5$ metros, resulta 0,003 93 y metros, que comparado con el requerido por losas planas [**30**], es tan sólo 0,020 $\sqrt{y}$ de aquél. Para $y = 25$, 49, 100 m., $e = 0,10$, 0,14, 0,20 m.

Al rebajamiento $r = 0,3535$ corresponde un desarrollo del arco de 1,305 L. La comparación de volúmenes de pantalla da en resumen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Plana} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}198\sqrt{y} \\ \text{Parabólica: } 0{,}003\,93\,y \times 1{,}305 = 0{,}005\ \ y \end{array}\right\} \quad [\mathbf{31}]$$

metros cúbicos por metro superficial. La parabólica es 0,025 $\sqrt{y}$ veces la plana. La reducción, colosal en las pequeñas profundidades, es siempre grandísima

para $y =$	9	16	25	36	49	64	100
$V' =$	0,594	0,792	0,990	1,188	1,386	1,584	1,980
$V =$	0,045	0,080	0,125	0,180	0,245	0,320	0,500

Prácticamente es imposible apurar tanto; hay un mínimo de espesor del que por razones constructivas no se puede bajar; en esta clase de obras lo estimamos en 15 cm. Le corresponde un volumen de 0,195 y permite alcanzar hasta algo más de 40 m. de profundidad. El forjado plano exige, á igualdad de luz, espesores crecientes, desde el inicial ($y = 1$) 0,198, hasta 1,260 m. Siempre para la luz, tomada como ejemplo, de 5 m.

Mas no se concreta á esto, con ser ya tan importante, la economía realizable con el tipo que proponemos. Las armaduras implican, con la cuantía del ejemplo, 0,008, y con el aumento por transversales, barras dobladas, etc., un total de 0,009, ó 70 kg. por metro cúbico.

En la pantalla parabólica la flexión es insignificante; el máximo momento se puede estimar, por alto, en $0{,}001\,8 \times 1.000\,yL^2 = 1{,}8\,yL^2$ en lugar de $125\,yL^2$. Las variaciones de temperatura dan una insignificancia, por la pequeñez del espesor relativamente á la luz. Para un espesor de 0,30, con la luz 5,00, la flecha 1,76, el coeficiente de dilatación 0,0000 010 y una variación de 30°, no llega á 100 metros-kilogramos. Por tanto, una pequeñísima cuantía, 0,002 á lo sumo, es más que sobrada para hacer frente á la flexión, máxime cuando los espesores son, como se ha visto, exagerados en gran escala. Se economizan, por tanto, unos 54 kg. de armadura por metro cúbico de pantalla.

Otras ventajas tan importantes, quizá como la económica, presenta nuestro tipo. La pantalla resulta, puede decirse, de libre dilatación; gracias á su forma tan marcadamente ondulada viene á ser algo como



los hogares y hervidores de ese nombre (*corrugated* en inglés). Esta ventaja es inapreciable, no sólo por lo que atañe á las variaciones de temperatura, muy grandes cuando se limpia el embalse, sino por lo relativo á la retracción inicial, debida al fraguado y á las dilataciones y contracciones en esta clase de obras considerables que el cambio de estado higrométrico origina. Lleno el embalse, el hormigón absorbe cierta cantidad de agua y se dilata. Al hacer una monda y quedar la pantalla al descubierto, la desecación la contraerá inevitablemente. Dilataciones y contracciones son igualmente fáciles, sin producción de fisuras, en la pantalla ondulada, cualquiera que sea su longitud. En la pantalla plana la única solución práctica es despiezarla anticipadamente, como ha hecho el constructor de La Prele, en losas independientes, rejuntadas con asfalto sobre los contrafuertes y unas sobre otras.

Al tratar del cálculo hemos visto la necesidad de prevenirse contra el pandeo de los contrafuertes, arriostrándolos á diversas alturas y separaciones. Esto es por completo independiente del tipo de pantalla. Para que las riostras actúen eficazmente, haciendo invariable la posición de sus nudos sobre los contrafuertes, precisa que estén enfiladas por series.

La longitud total de cada serie, pequeña en las más bajas, llegará á ser bastante ó muy grande en las próximas á la coronación. No influirá en ellas la alteración de estado higrométrico, pero sí la de temperatura ambiente. El efecto de ésta es inevitable; pero tanto menos sensible cuanto más robusta, de menos perímetro respecto á su sección y más rígida es una pieza. Por las dos primeras condiciones, la temperatura media interna, á la que, en suma, corresponde la variación de longitud de la pieza, oscilará entre límites menos distantes que los de la temperatura ambiente; por la rigidez, la tendencia á arquearse podrá ser eficazmente contrarrestada.

En nuestra obra (cap. VII, párrafo 2.°) demostramos que con un cierto valor de la cuantía de armaduras convenientemente dispuestas, es factible evitar, en absoluto, la fisuración por alteraciones de longitud. En suma, un corto número de riostras, gruesas, de sección octogonal, con fuerte armadura simétrica, bien distribuída en numerosas barras, harán que una obra de este género soporte sin fisuración ni deformación peligrosa los cambios atmosféricos más extremados.

Respecto á la impermeabilidad, el éxito de nuestros compañeros Ribera y Luiña en el sifón de Albelda hace inútil la discusión. Si, para presiones bastante superiores á las que allí actúan, pudiera abrigarse alguna duda, quedan al ingeniero dos recursos que utilizar:



1.° La impermeabilización directa. Aparte de dar la oportuna composición granulométrica á las gravas y arenas y de emplear una riqueza en cemento no inferior á 450 kg. por metro cúbico, la adición de 5 kilogramos de jabón potásico por esa misma unidad, disuelto en el agua de amasado, produce dentro del conglomerado una cantidad de jabón cálcico que en absoluto ciega todos los poros.

2.° La impermeabilización indirecta. El alquitrán mineral, en caliente, aplicado como pintura, en dos ó tres manos, sobre el hormigón bien seco, penetra algunos centímetros dentro de la masa, y sin alterar sus cualidades mecánicas, hace, como todo cuerpo graso, que no sea mojado por el agua, además de tapizar y obturar todos los poros.

La falta material de tiempo nos impide completar este estudio con la comparación detallada de volumen y de costo entre:

Una presa de fábrica, calculada por los métodos modernos.

Otra de hormigón armado, tipo La Prele, de pantalla plana.

Otra del tipo propuesto, de perfil elíptico y pantalla parabólica.

Aproximadamente, tratando más bien de exagerar en beneficio de la presa ordinaria, podemos formular así los volúmenes por metro lineal para perfil de una misma altura.

V'	: de fábrica, perfil Lévy (densidad media $= 2{,}23$; base media $= 0{,}900\ a$)	$0{,}450\ a^2$
V''	: de hormigón armado, perfil recto, pantalla plana................	$0{,}098\ a^2$
V	: — — — elíptico, — parabólica............	$0{,}044\ a^2$

Y resulta así:

$$V'' = 0{,}217\,77\ V'$$
$$V = 0{,}448\,97\ V'' = 0{,}097\,77\ V';$$

El primer volumen es exacto; los otros dos aproximados con bastante exceso. Un estudio detenido del elemento tan importante en todos los problemas análogos, la separación entre ejes de contrafuertes, que será función de las cargas totales ó de la altura de embalse, conducirá seguramente en la mayoría de los casos á volúmenes unitarios más pequeños aún.

Aún pudiera exagerarse la ventaja si al contrafuerte, muro corrido de sección horizontal rectangular, se substituyera un entramado. Pero la complicación y encarecimiento de la mano de obra compensarían, quizá con creces, la reducción obtenida. Por otra parte, la dificultad de calcular tal sistema (que, salvo el caso de altura mediana, sería



complicado con una indeterminación de orden muy alto, es decir, con un número de reacciones—fuerzas y momentos—de sustentación, estáticamente indeterminados, muy crecido), sería muy grande. Y aunque resoluble el problema, gracias al fecundísimo teorema de Castigliano, del mínimo del trabajo de deformación, las inevitables divergencias entre el cálculo y la ejecución material obligarían á forzar coeficientes de seguridad y á perder gran parte de lo tan penosamente conquistado.

Las soluciones verdaderamente ingenieriles han de tener un carácter fundamental de sencillez, sobre todo en problemas como el que nos ocupa. Precisamente por esta razón hemos desistido de nuestra primera idea respecto á la constitución de la pantalla de un modo perfectísimo en el terreno especulativo, inadmisible en el práctico.

En pura teoría la solución del problema general de cubrir un vano de determinada forma, de modo que el material trabaje en las condiciones más favorables, tiene una solución radical, absolutamente perfecta. Cualquiera que sea el contorno de ese vano, supongamos ceñida á él una membrana elástica, *de rigidez nula*, susceptible tan sólo de soportar cargas por tensión.

Sometida á las fuerzas que hayan de actuar sobre la cubierta, esa membrana se deformará, hasta quedar afectando una superficie tal, que en cada punto haya equilibrio entre la presión externa y la resultante de las fuerzas interiores; es decir, una superficie funicular de las exteriores.

Esas superficies, estudiadas por Laplace, están definidas, en el caso de ser las fuerzas presiones constantes, por la condición de que su curvatura media en cualquier punto, $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$, es constante también, é igualmente lo es el valor de la carga molecular en cualquier punto y en cualquier dirección; exclusivamente una presión, si la exterior obra sobre la convexidad y una extensión si sobre la concavidad. Son las superficies *velarias*, las que afecta, rigurosamente, una película líquida apoyada en un contorno, y, aproximadamente, la vela de un barco.

Si se construye una bóveda de pequeño espesor de modo que su superficie media sea la *velaria* que al contorno de apoyo corresponde, el trabajo del material es exclusivamente el de compresión (en el caso ordinario), igual en todos sus puntos y direcciones, sin que en ninguno exista tensión, flexión ni esfuerzo cortante.

Lévy abordó hace años el problema de determinar con la exactitud



necesaria para la práctica la forma de las *velarias* sobre contorno rectangular. Aprovechando su estudio, propusimos en nuestro proyecto para la cubierta del depósito del Lozoya, realizarla por medio de placas bombeadas de 6 × 4 m., con 0,40 de flecha y 0,04 de espesor, cuyo trabajo en las condiciones de prueba, bajo una sobrecarga de una tonelada por metro cuadrado, no hubiera excedido de unos 6 kilogramos por centímetro cuadrado.

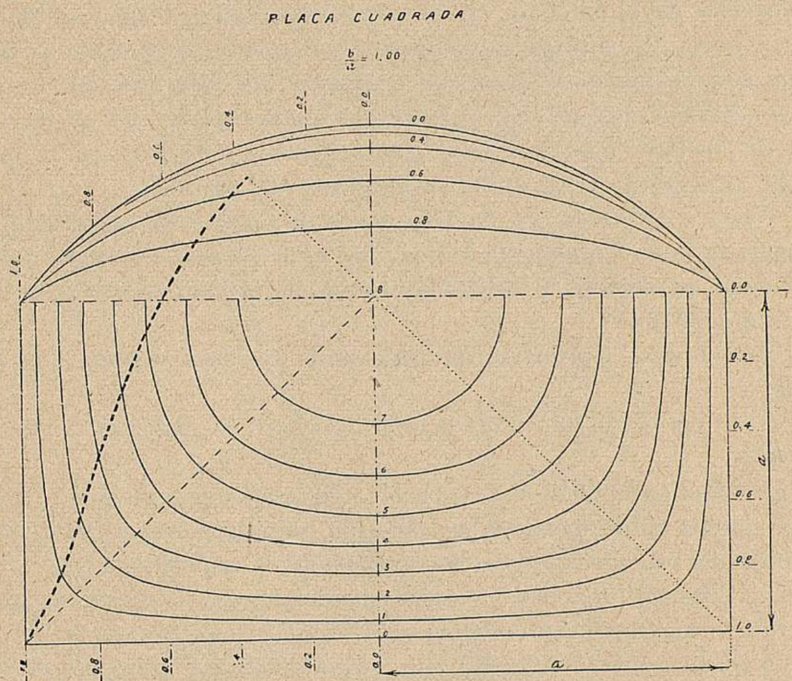


Fig. 14.

Ligados los contrafuertes de una presa por nervios transversales de modo que la superficie de la pantalla quede subdivida en cuadrados, y cubierto cada uno de éstos por una placa, se logra un verdadero mínimo de espesor, tanto más reducido cuanto mayor sea la flecha que se adopte relativamente al lado del cuadrado. La *figura 14* da exacta idea de la forma de una de estas placas *velarias* sobre contorno cuadrado.

Pero si la placa trabaja en condiciones admirables, en cambio requiere un contorno de apoyo: dos lados, los contrafuertes, existen desde luego; otros dos es preciso realizarlos por medio de nervios

transversales. Sobre unos y otros elementos del contorno actúan los empujes producidos por la placa, empujes que es preciso equilibrar, no mutua, sino individualmente. La solución es sencilla: aprovechar el contraempuje del agua y proporcionar la flecha con la luz de tal modo, que cualquiera que sea la presión, cada placa sólo ejerza sobre su contorno de apoyo acciones normales al plano del mismo.

Estas acciones normales, enormes á poco que crezcan las presiones, son perfectamente resistidas en los contrafuertes; para serlo por los nervios necesitan éstos una sección y rigidez que exigen hormigón y armaduras en cantidad muy superior á lo que en la placa se ha economizado. A menos de distanciar muy poco los contrafuertes, lo que sería aún peor, los nervios, para cargas modestas, de 25 á 30 m., deben ser bastante más poderosos que en puentes de ferrocarril, para llegar á cargas de 50 á 60 m., verdaderamente enormes.

Y no es esto sólo. La pantalla, lejos de ser elástica, en el sentido vulgar, se hace sumamente rígida; las alteraciones de longitud, en particular las debidas á cambios de estado higrométrico, la hacen trabajar muchísimo.

Tal solución, á primera vista seductora, resulta, en suma, inaceptable.

Y, sin embargo, la que ya hemos descripto es genéricamente esa misma.

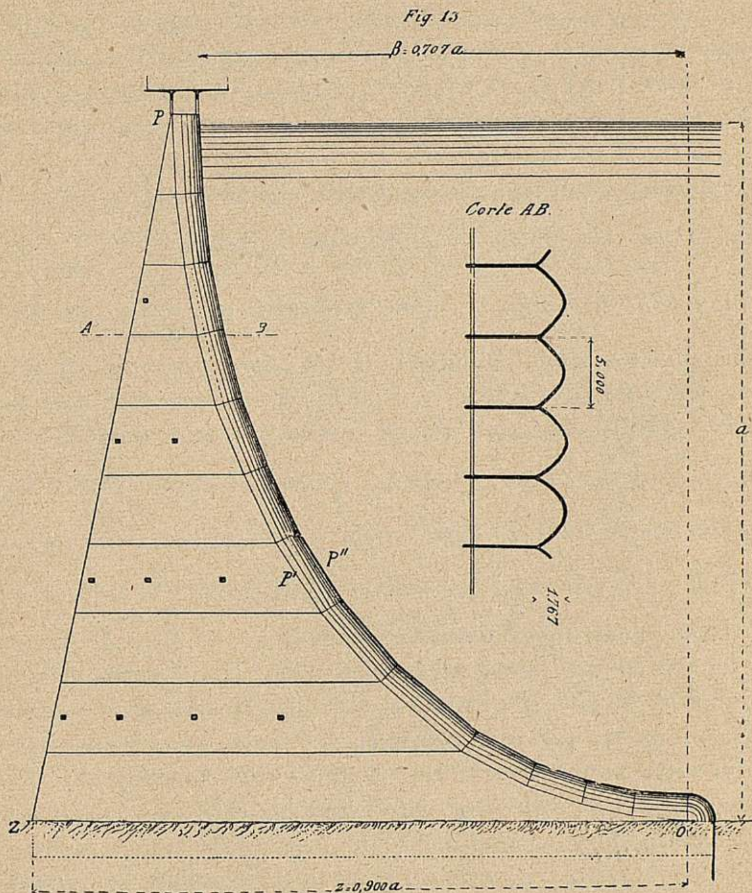
El cañón parabólico es la superficie velaria sobre contorno rectangular, cuyos lados menores se alejan al infinito; goza de todas sus propiedades; su trabajo, cuando la presión es uniforme, como lo es en cada sección horizontal, es exclusivamente una compresión también uniforme. Por no involucrar el problema hemos calculado, al tratar de ellos, la máxima flexión que, considerándolos como arcos sujetos á una carga igualmente distribuída según la cuerda, les corresponde.

Esto, aunque no lógico, es prudente, porque, aunque pequeña, la rigidez ejerce una influencia sensible cuando el espesor no es, como el cálculo de la superficie de Laplace implica, infinitamente pequeño.

Al desaparecer dos lados del contorno, si bien no se puede escatimar el espesor de la pantalla hasta el límite que con las placas se alcanzaría, desaparecen las filas de nervios transversales con su crecido costo, y sobre todo con la complicación que introducen. Y de nada práctico serviría llegar á un límite de espesor que consideraciones constructivas obligan á hacer como mínimo, muchas veces mayor.

En la *figura 15* representamos en esquema una presa de nuestro tipo.

A la elipse teórica $O' P' P$, se substituirá en la práctica un polígono inscrito: así, la superficie de la pantalla, en lugar de ser una toral elíptica, será una serie de cañones rectos, facilísimos de construir. Unicamente en el fondo, para ligar la pantalla con el rastrillo, será preciso voltear cada cañón alrededor de la horizontal O', formando un



cuarto de toro de meridiana parabólica. El rastrillo, que no es sino la continuación de la pantalla dentro del terreno, debe lógicamente conservar su misma forma, lográndose así en él una considerable economía. Los contrafuertes tendrán espesor creciente por retallos, ó mejor de un modo gradual, desde la coronación abajo. Sus armaduras, que el cálculo inductivo supone simétricas, deben, mejor, ser distribuídas desimétricamente, disminuyeudo las contiguas á PZ, donde el tra-



bajo es siempre de compresión, para aumentar, en las zonas altas, las inmediatas á $P' P$, donde, en buena parte, reinarán cargas de tensión. Las armaduras de la pantalla deberán ser simétricas.

Pero hagamos notar una desventaja, á primera vista grandísima, que nuestro tipo presenta. En las presas de perfil triangular, sean de fábrica, sean de hormigón armado (La Prele ó el de la *figura 9.ª*), los perfiles *incompletos*, correspondientes á diversos valores, y, de la profundidad de embalse, gozan de las mismas condiciones mecánicas que el perfil total. Las relaciones entre el empuje y el peso estabilizador y entre los respectivos momentos son constantes é independientes de y.

En nuestro perfil nada de eso sucede. El peso estabilizador necesario para que se cumplan las condiciones mecánicas $(d = \frac{z}{3}; \varepsilon = 2)$, corresponde al cuadrante del elipse de semiejes y y $\frac{1}{\sqrt{2}} y$. En los perfiles incompletos, comprendidos entre la coronación y una profundidad y, menor que la máxima a, dicho peso corresponde al área del segmento elíptico segregado por la ordenada y, área que decrece mucho más rápidamente que el empuje $\frac{1}{2} y^2$. El contrafuerte trabaja por flexión compuesta: en la sección-zarpa z, la zona sujeta á cargas de tracción es nula $(d = \frac{z}{3})$; en cualquier otra sección horizontal dichas cargas toman importancia tanto mayor, por la zona en que reinan y por los valores que alcanzan, cuanto menor es y. Dentro de la masa de hormigón armado que constituye el contrafuerte nada importa; á ello se debe precisamente la economía del perfil. Pero en la superficie de junta entre contrafuerte y terreno, esa forma de trabajo es inadmisible; aun en roca compacta, en la que se pudieran anclar sólidamente las armaduras, sería descabellado admitir trozos de presa constituídos por piezas empotradas en el terreno, de estabilidad puramente *elástica* en lugar de serlo elástica y *estática*.

A cada valor de la profundidad y de la cerrada corresponde, en rigor, un perfil propio, elipse de semiejes y y $\frac{1}{\sqrt{2}} y$. La unión de dos contrafuertes subsiguientes, de distinta y resulta complicadísima: las superficies cilíndricas de los cañones degeneran en superficies regladas, de generatrices parabólicas variables; sobre todo, se pierde de golpe la ventaja más característica de la pantalla ondulada: la de ser sus



elementos estables separadamente y de no ejercer más que acciones siempre contenidas en los planos de los contrafuertes.

Así, de conservar en todo su rigor el trazado del perfil elíptico, parece imposible cohonestarlo en la práctica con la pantalla ondulada, al acomodar la presa á las distintas profundidades de embalse que la forma de la cerrada requiere.

Hay, sin embargo, un modo sencillo y práctico de utilizar todas las ventajas enumeradas en la mayor parte de una presa, fuera del caso en que la cerrada sea marcadamente triangular.

En general, el alzado de una presa comprende (*fig. 16*) cuatro zonas: una, de bastante longitud, de profundidad constante ó que con poco gasto se puede hacer tal; otra, más corta, en la que rápidamente crece y decrece la profundidad y, por último, las dos laterales, en las que el decrecimiento es progresivo hasta la acometida en los costados.

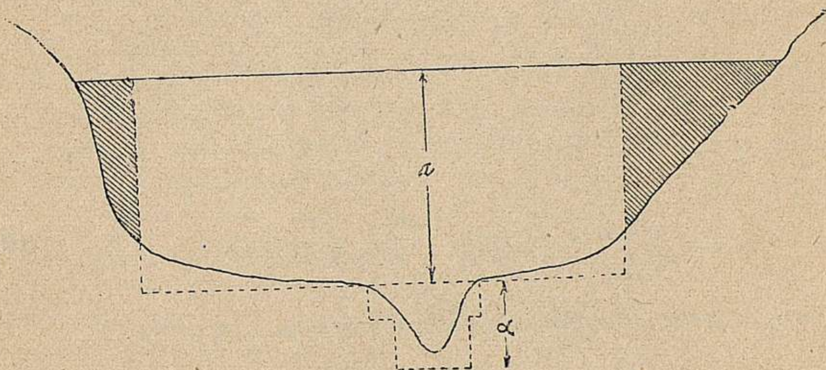


Fig. 16.

Si se toma como profundidad típica del embalse la señalada por a en la figura y se cierran las zonas laterales, de superficie siempre escasa respecto á la total, con muros ordinarios de fábrica, se podrán obtener todas las ventajas del tipo propuesto, en la mayor parte de la presa, siempre que el perfil tipo, de altura a, pueda ser adaptado á una profundidad mayor y variable, $a + \alpha$, sin alteración de sus condiciones mecánicas.

El problema es fácil. A partir del pie de la elipse O (*fig. 17*), prosigamos el perfil según la solución general de la *figura 9.ª*, por una recta de inclinación 1,000, y determinemos el valor de la nueva zarpa ζ, correspondiente á una profundidad α por bajo de la primitiva a. Ese va-



lor se compone: de una parte constante, la zarpa relativa á la elipse $z = 0{,}900\ a$, de un aumento por la parte interior, igual á la variable α y de otro aumento variable, desconocido, x, por la parte exterior.

El peso estabilizador corresponde ahora: al cuarto de elipse, $\frac{\pi a^2}{4\sqrt{2}}$ ó $\frac{5}{9} a^2$; al rectángulo OP_1, $a\alpha$ y al triángulo $OO_1\ O'$, $\frac{\alpha^2}{2}$; el empuje total es $\frac{(a+\alpha)^2}{2}$.

La condicion fundamental, $d = \frac{\zeta}{3}$, se expresa por

$$\frac{5}{9} a^2 \left(\frac{9}{10} a + x - \frac{3}{10} a\right) + a\alpha \left(\frac{9}{10} a + \frac{\alpha}{2} + x\right) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{9}{10} a + x + \frac{2}{3} \alpha\right) - \frac{(a+\alpha)^3}{6} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{9}{10} a + x + \alpha\right) \times \left(\frac{5}{9} a^2 + a\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

que se reduce á

$$x = a \frac{23 a\alpha + 9\alpha^2}{100 a^2 + 180 a\alpha + 90\alpha^2} \qquad \textbf{[32]}$$

ó bien, expresando α por una parte alícuota de a, $\alpha = n\ a$:

$$x = a \frac{23n + 9n^2}{100 + 180n + 90n^2}. \qquad \textbf{[33]}$$

Para

$\frac{\alpha}{a} =$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\frac{x}{a} =$	0,0044	0,0087	0,0127	0,0165	0,0201	0,0355	0,0414	0,0571	0,0647

Si la altura se duplica ($\alpha = a$), $x = 0{,}0865\ a$; la nueva zarpa $\zeta = a\,(0{,}0865 + 0{,}9000 + 1) = 1{,}9865\ a$, es poco mayor que el doble de la primitiva, $z = 0{,}900\ a$. El extremo de la zarpa describe, cuando el suplemento de altura α crece al partir de cero, una curva

ZZ_n muy tendida, que se confunde casi con la prolongación de la arista PZ. Si se adopta esta recta, $x = (0{,}900 - 0{,}707)\,\alpha = 0{,}193\,\alpha$, el error cometido, muy pequeño, es por defecto hasta $\alpha = 0{,}075\,a$ y por exceso en adelante.

Los valores totales de la nueva zarpa $\zeta = x + 0{,}90\,a + \alpha$, y de la superficie total del contrafuerte Σ, son exactamente para

$\frac{\alpha}{a} =$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\frac{\zeta}{a} =$	0,9244	0,9487	0,9727	0,9965	1,0201	1,1355	1,2414	1,3571	1,4647
$\frac{\Sigma}{a^2} =$	0,2670	0,2856	0,3046	0,3240	0,3448	0,4522	0,5698	0,7000	0,8400
$\frac{T}{a^2} =$	0,5202	0,5408	0,5618	0,5832	0,6050	0,7200	0,8450	0,9800	1,1250

La línea de valores $\frac{T}{a^2}$ da las superficies de contrafuerte triangular del tipo de perfil recto para las alturas totales $a + \alpha$. Como es natural, el perfil mixto pierde tanto más de su ventaja cuanto mayor es el suplemento α, pero siempre ofrece una gran reducción.

El coeficiente de estabilidad es:

$$\varepsilon = \frac{\frac{5}{9}a^2\left(\frac{6}{10}a + x\right) + a\alpha\left(\frac{9}{10}a + \frac{\alpha}{2} + x\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{9}{10}a + x + \frac{2}{3}\alpha\right)}{\frac{1}{6}(a+\alpha)^3}$$

y se reduce á la forma:

$$\varepsilon = 2 + \frac{16{,}67a^4\alpha + 170a^3\alpha^2 + 189a^2\alpha^3 + 135a\alpha^4}{(100a^2 + 180a\alpha + 90\alpha^2)(a+\alpha)^3}$$

número esencialmente mayor que 2 cuando $\alpha > 0$ y que crece con α, aunque muy despacio.

El nuevo perfil mixto, con las mismas ó algo mejores condiciones mecánicas que el puramente elíptico, se amolda perfectamente á las variaciones de altura, desde la mínima a, que conviene tomar lo mayor posible dentro de las condiciones que ofrezca la cerrada, hasta cuanta se necesite.

La pantalla ondulada de cañones parabólicos se voltea alrededor de la horizontal proyectada en O, hasta la dirección vertical en las zo-



nas de profundidad *a* y hasta la de 45° en las de mayor fondo. Completan el cerramiento escalonado los contrafuertes prolongados dentro del terreno. Claro es que el frente tiene que quedar formado por una serie de rectángulos, y que los trozos de cañón deben ser completos en el sentido de su anchura, á fin de que la presión del agua se ejerza simétricamente sobre ellos.

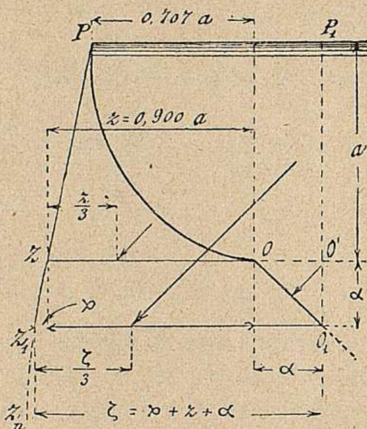


Fig. 17.

La presa de hormigón armado debe quedar encuadrada entre dos muros de fábrica, perfil Lévy, limitados por planos normales paralelos á los contrafuertes y distantes del último de éstos la misma separación entre ejes de todos. Los cañones parabólicos acometerán sobre esos estribos, que por la parte agua abajo de la elipse envolvente de los arranques de aquéllos presentará el regrueso necesario.

Si la cerrada ofrece costados en roca compacta y con talud escaso, será más sencillo desmontar en aquéllos lo necesario para acometer directamente con los cañones.

Será facilísimo establecer sobre la coronación una vía de toda la importancia que se quiera, levantando dos series de pilares, una en todos los arranques de la pantalla, otra en todos los vértices. La luz de los nervios que liguen cada serie será siempre la misma; la disposición de sus apoyos en tresbolillo resulta muy favorable. Un forjado con dos vuelos laterales dará una sección en II con toda la amplitud que se quiera, sencilla, rígida y económica.

El tipo que proponemos permitirá llegar á alturas de embalse muy



grandes con la misma, por no decir mayor, seguridad que con los inmensos muros triangulares de centenares de miles de metros cúbicos y con una reducción de costo considerable.

La relación de volúmenes de uno á diez en la presa propiamente dicha, de uno á doce por lo menos en el conjunto, incluso rastrillo y cimiento, da con la relación de seis á uno que, como máximo, puede tomarse entre hormigón armado y fábrica en esa clase de obras, una relación final de costo del simple al doble.



750